数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 67-72

An explicit formula of the unramified Shintani functions for $(\mathbf{GSp}_4, \mathbf{GL}_2 \times_{\mathbf{GL}_1} \mathbf{GL}_2)$

大阪大学大学院理学研究科　源嶋 孝太* (Kohta Gejima)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
OSAKA UNIVERSITY

F を任意の非アルキメデス的局所体とする. このノートでは F 上の分裂簡約代数群の対 $(\mathbf{GSp}_4, \mathbf{GL}_2\times_{\mathbf{GL}_1}\mathbf{GL}_2)$ に対する (不分岐) Shintani 関数の明示公式と, その Murase–Sugano 型局所ゼータ積分への応用を紹介する. F の標数が 2 でない場合の明示公式は, Kato–Murase–Sugano [KMS] により与えられた分裂特殊直交群の組 $(\mathbf{SO}_n, \mathbf{SO}_{n-1})$ に対する (Whittaker–) Shintani 関数の明示公式を accidental 同型 $\mathbf{PGSp}_4 \simeq \mathbf{SO}_5$ により引き戻すことにより得られるが, 一般には未解決であった. $(\mathbf{GSp}_4, \mathbf{GL}_2 \times_{\mathbf{GL}_1} \mathbf{GL}_2)$ に対して, Kato–Murase–Sugano の証明を "やり直す" ことにより, F の標数が 2 の場合も Shintani 関数の明示公式が得られる. 詳細はプレプリント [G] を参照されたい.

1 準備

1.1 代数群

F を非アルキメデス的局所体とし, $\mathfrak{o}$ を F の整数環, $\mathfrak{p} = (\varpi)$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアルとする. $q := \sharp(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$ とおく. 局所コンパクト群 G,G_0 をそれぞれ

$$G = \mathbf{GSp}_4(F) := \{g \in \mathbf{GL}_4(F) \mid {}^tg \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix}, {}^\exists\nu(g) \in F^\times\},$$

$$G_0 = (\mathbf{GL}_2 \times_{\mathbf{GL}_1} \mathbf{GL}_2)(F) := \{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & & * & \\ & * & & * \\ \hline * & & * & \\ & * & & * \end{array}\right) \in G\}$$

により定める. ここで 1_n は n 次の単位行列である. G (および G_0) の極大 (分裂) トーラス T $(= T_0)$ として

$$T := \{t(t_1, t_2, t_3) := \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}t_3, t_2^{-1}t_3) \in G\}$$

を固定し, P (resp. P_0) を次で定義される G (resp. G_0) の Borel 部分群とする:

$$P := \{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ \hline & & * & \\ & & * & * \end{array}\right) \in G\}, \quad (\text{resp. } P_0 := P \cap G_0).$$

また, K (resp. K_0) を

$$K := G \cap \mathbf{GL}_4(\mathfrak{o}), \quad (\text{resp. } K_0 := G_0 \cap K)$$

により定義される G (resp. G_0) の極大コンパクト部分群とする.

*kohta.gejima@gmail.com

$\mathbb{Z}^3$ の部分集合 $\Lambda^+, \Lambda_0^{++}$ を

$$\Lambda^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3 |\ \lambda_1 \geq \lambda_2, 2\lambda_2 \geq \lambda_3\}, \quad \Lambda_0^{++} = \{\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_1) \in \mathbb{Z}^3 | \lambda'_1 \geq 0, 2\lambda'_2 \geq \lambda'_1\}$$

により定める.

命題 1.1.1

$$G = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \Lambda^+ \\ \lambda' \in \Lambda_0^{++}}} K_0 t(\lambda')\eta t(\lambda) K.$$

ここで

$$\eta := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ \hline & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{array}\right), \qquad t((\mu_1, \mu_2, \mu_3)) := t(\varpi^{\mu_1}, \varpi^{\mu_2}, \varpi^{\mu_3}).$$

1.2 不分岐主系列表現

$(H, P_H, K_H) = (G, P, K)$ または (G_0, P_0, K_0) とする. 不分岐指標 $\chi \in X_{nr}(T)$ に対して,

$$i_{P_H}^H(\chi) = \{f \in C^\infty(H) |\ f(ph) = (\chi \delta_{P_H}^{1/2})(p) f(h), {}^\forall(p, h) \in P_H \times H\}$$

とおく. ここで δ_{P_H} は P_H のモジュラス指標である. このとき, H は $i_{P_H}^H(\chi)$ に右移動により作用する: $H \overset{R}{\curvearrowright} i_{P_H}^H(\chi)$. $i_{P_H}^H(\chi)$ は H の不分岐主系列表現と呼ばれる. 不分岐主系列表現 $i_{P_H}^H(\chi)$ の, K_H の作用により固定される部分空間 $i_{P_H}^H(\chi)^{K_H}$ は一次元である. その基底 $\phi_{K_H,\chi}$ を一つ固定する. また, 良く知られているように $i_{P_H}^H(\chi)^{K_H}$ には (H, K_H) の Hecke 環 $\mathcal{H}(H, K_H)$ が作用する, すなわち, ある $\mathbf{C}$-代数の準同型 $\omega_\chi : \mathcal{H}(H, K_H) \to \mathbb{C}$ で,

$$R(\varphi)\phi_{K_H,\chi} = \omega_\chi(\varphi)\phi_{K_H,\chi}, \quad {}^\forall\varphi \in \mathcal{H}(H, K_H)$$

をみたすものが存在する.

1.3 不分岐 Shintani 関数

$\mathcal{H}(G, K)$ (resp. $\mathcal{H}(G_0, K_0)$) を (G, K) (resp. (G_0, K_0)) に対する Hecke 環とする. 各 $(\xi, \Xi) \in X_{nr}(T_0, T) := X_{nr}(T_0) \times X_{nr}(T)$ に対して, (不分岐) Shintani 関数の空間 $\mathcal{S}(\xi, \Xi)$ を

$$\mathcal{S}(\xi, \Xi) := \{S \in C(G) |\ L(\phi)R(\Phi)S = \omega_\xi(\phi)\omega_\Xi(\Phi)S, {}^\forall(\phi, \Phi) \in \mathcal{H}(G_0, K_0) \times \mathcal{H}(G, K)\}$$

により定める. ここで

$$L(\phi)R(\Phi)S(x) := \int_{G_0} dg' \int_G dg\ \phi(g')S(g'^{-1}xg)\Phi(g)$$

である. Z (resp. Z_0) をそれぞれ G (resp. G_0) の中心とする: $Z \subset Z_0$. 次の性質は Shintani 関数の定義からすぐにわかる.

補題 1.3.1 各 $S \in \mathcal{S}(\xi, \Xi)$ に対して

i) $S(k'xk) = S(x) \quad ({}^\forall(k', x, k) \in K_0 \times G \times K)$;

ii) $S(z_0xz)=\xi(z_0)^{-1}\Xi(z)S(x) \quad ({}^\forall(z_0,x,z)\in Z_0\times G\times Z)$.

特に $\mathcal{S}(\xi,\Xi)\neq\{0\}$ ならば $(\xi\Xi)|_Z\equiv 1$ である.

命題 1.1.1 および補題 1.3.1(i) から, Shintani 関数 $S\in\mathcal{S}(\xi,\Xi)$ は集合 $\{t(\mu')\eta t(\mu)|\ (\mu',\mu)\in\Lambda_0^{++}\times\Lambda^+\}$ 上の値によって決まることがわかる.

2 不分岐 Shintani 関数の明示公式

各 $(\xi,\Xi)=((\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3))\in X_{nr}(T_0,T)\simeq(\mathbb{C}^\times)^3\times(\mathbb{C}^\times)^3$ に対して

$$c(\xi,\Xi):=\frac{\mathbf{b}(\xi,\Xi)}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\Xi_1\Xi_2)(1-\Xi_1\Xi_2^{-1})(1-\Xi_1)(1-\Xi_2)}$$

とおく. ここで $\mathbf{b}(\xi,\Xi)$ は次で定義される多項式である:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\xi,\Xi)=&(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_3\xi_1\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_3\xi_2\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_3\xi_1\xi_2\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_2\Xi_3\xi_1\xi_2\xi_3)\\ &\times(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_2\Xi_3\xi_1\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_2\Xi_3\xi_2\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_2\Xi_3\xi_3)(1-q^{-1/2}\Xi_1\Xi_2\Xi_3\xi_1\xi_2\xi_3).\end{aligned}$$

定理 2.0.2 $(\xi,\Xi)\in X_{nr}(T_0,T)$ とする. このとき

i) $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}(\xi,\Xi)=\begin{cases}1 & (\mathit{if}\ (\xi\Xi)|_Z\equiv 1),\\ 0 & (\mathit{otherwise}).\end{cases}$

ii) 各 $(\lambda',\lambda)\in\Lambda_0^{++}\times\Lambda^+$ に対して, Shintani 関数 $S\in\mathcal{S}(\xi,\Xi)$ は

$$S(t(\lambda')\eta t(\lambda))=S(1_4)\frac{(\Xi_1\Xi_2\Xi_3^2)^{\lambda_3}}{(1-q^{-2})^2}\sum_{\substack{w\in W\\ w'\in W_0}}c(w'\xi,w\Xi)\left((w\Xi)^{-1}\delta^{1/2}\right)(t(\lambda))\left((w'\xi)^{-1}\delta_0^{1/2}\right)(t(\lambda'))$$

で与えられる. ここで W (resp. W_0) は (G,T) (resp. (G_0,T_0)) の Weyl 群である.

3 応用

不分岐 Shintani 関数の明示公式の応用として, (G,G_0) に対する Murase–Sugano 型 (不分岐) 局所ゼータ積分を評価し, それが $\mathbf{GSp}_4$ のスピン L-因子を表示することを示す.

3.1 Iwasawa decomposition of $\mathbf{GSpin}_6$.

G_1 を次で定義される $\mathbf{GL}_4(F)$ の部分群とする:

$$G_1=(\mathbf{GL}_4\times_{(\mathbf{GL}_1)^2}\mathbf{GL}_1)(F):=\{g\in\mathbf{GL}_4(F)|\ \det(g)\in(F^\times)^2\}$$

Murase–Sugano 型局所ゼータ積分を定義するために, G_1 の Iwasawa 分解について考える. P_{22} を次で定義される G_1 の極大放物型部分群とする:

$$P_{22}=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ & * & & * \\ \hline * & * & * & * \\ & * & & * \end{array}\right)\in G_1\right\}=M_{22}N_{22}.$$

ここで M_{22} は P_{22} の Levi 部分群

$$M_{22}=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} * & & * & \\ & * & & * \\ \hline * & & * & \\ & * & & * \end{array}\right)\in G_1\right\}$$

であり, N_{22} は P_{22} の冪単根基である. 各 $m_1\in M_{22}$ は

$$m_1=\beta(m_1)\mathrm{diag}(\alpha(m_1),1,\alpha(m_1),1)\quad(\beta(m_1),\alpha(m_1))\in G_0\times F^{\times}$$

と分解できることに注意する. したがって, $K_1:=G_1\cap GL_4(\mathfrak{o})$ とおくと, 任意の $g_1\in G_1$ は

$$\begin{aligned} g_1&=m_1(g_1)n_1(g_1)k_1(g_1)\\ &=\beta(m_1(g_1))\mathrm{diag}(\alpha(m_1(g_1)),1,\alpha(m_1(g_1)),1)n_1(g_1)k_1(g_1) \end{aligned}\tag{3.1}$$

と分解できる. ここで $(m_1(g_1),n_1(g_1),k_1(g_1))\in M_{22}\times N_{22}\times K_1$. 各 $g_1\in G_1$ に対して上のような分解を固定する. $\beta(g)=\beta(m_1(g))$ and $\alpha(g)=\alpha(m_1(g))$ とおく. 次の補題は容易に確かめられる.

補題 3.1.1

$$P_{22}\cap K_1=\begin{pmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{GL}_2(\mathfrak{o})&\mathbf{Mat}_2(\mathfrak{o})\\&\mathbf{GL}_2(\mathfrak{o})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&&1&\\&-1&&\\&&&1\end{pmatrix}^{-1}\cap K_1.$$

3.2 Murase–Sugano 型局所ゼータ積分

$(\xi,\Xi)\in X_{nr}(T_0)\times X_{nr}(T)$ とする. Shintani 関数 $S\in\mathcal{S}(\xi,\Xi)$ に対して, Murase–Sugano 型ゼータ積分は

$$Z_{MS}(s;S):=\int_{G_0\backslash G}S(\beta(g)^{-1}g)|\alpha(g)|^s d\dot{g},\tag{3.2}$$

と定義される. ここで $|\cdot|$ は (正規化された) $\mathfrak{p}$-進絶対値である.

注意 3.2.1 局所ゼータ積分 (3.2) は, $\mathbf{GSp_4}$ の Hecke 固有カスプ形式と, $\mathbf{GL}_4\times_{(\mathbf{GL}_1)^2}\mathbf{GL}_1$ のある Eisenstein 級数の "内積" として定義される大域ゼータ積分の局所成分に現れる (*cf.* [MS]).

Shintani 関数 $S\in\mathcal{S}(\xi,\Xi)$ は $K_0\backslash G/K$ 上の関数とみなされるので, 補題3.1.1により, 値 $S(\beta(g)^{-1}g)|\alpha(g)|^s$ は $g\in G(\subset G_1)$ の分解 (3.1) に依らないことがわかる. 各 $\chi=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)\in(\mathbb{C}^{\times})^3$ と $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$L(\chi;s):=(1-\chi_3q^{-s})^{-1}(1-\chi_1\chi_3q^{-s})^{-1}(1-\chi_2\chi_3q^{-s})^{-1}(1-\chi_1\chi_2\chi_3q^{-s})^{-1}.$$

とおく.

定理 3.2.2 $(\xi,\Xi)\in X_{nr}(T_0)\times X_{nr}(T)$ とする. 各 $S\in\mathcal{S}(\xi,\Xi)$ に対し, s の実部が十分大きければゼータ積分 $Z_{MS}(s;S)$ は絶対収束し,

$$Z_{MS}(s;S)=S(1_4)\frac{L(\Xi;s)}{L(\xi^{-1};s+1/2)}.$$

が成り立つ.

注意 3.2.3 定理 3.2.2 は分裂特殊直交群の組 $(\mathbf{SO}_5(F),\mathbf{SO}_4(F))$ に対する Murase–Sugano の結果 [MS, Theorem 1.6] の一般化である. Murase–Sugano は "ノルム関数" の積分を計算することにより局所ゼータ積分を評価した. その際, Shintani 関数の明示公式は用いていないことに注意したい. したがって, 次のサブセクションで述べる証明は Murase–Sugano の結果の別証明となっている.

3.3 Murase–Sugano 型局所ゼータ積分の評価

G は次の分解をもつ.

命題 3.3.1

$$G = \bigsqcup_{l \geq 0} G_0 a(l) K, \qquad a(l) := \eta \cdot t((l,l,l)).$$

定理 3.3.1 より, 任意の右 K-不変可積分関数 $F : G_0 \backslash G \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_{G_0 \backslash G} F(g) d\dot{g} = \sum_{l=0}^{\infty} F(a(l)) v_l, \qquad v_l := \mathrm{vol}(G_0 \cap a(l) K a(l)^{-1}; dg')^{-1}$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} Z_{MS}(s;S) &= \sum_{l=0}^{\infty} S(\beta(a(l))^{-1} a(l)) |\alpha(a(l))|^s v_l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} S(\beta(a(l))^{-1} a(l)) v_l q^{-ls}. \end{aligned}$$

ここで $\beta(a(l))^{-1} a(l) \in K_0 a(l) K$ に注意すると,

$$Z_{MS}(s;S) = \sum_{l=0}^{\infty} S(a(l)) v_l q^{-ls}$$

が成り立つ. 各 $l \geq 0$ に対して, 指数 $[G_0 \cap a(l) K a(l)^{-1} : G_0 \cap a(l+1) K a(l+1)^{-1}]$ を直接計算することで次の命題を示すことができる.

命題 3.3.2 非負整数 $l \geq 0$ に対して

$$v_l = \begin{cases} 1 & (\textit{if } l = 0), \\ q^{3l}(1 - q^{-2}) & (\textit{if } l > 0). \end{cases}$$

特に, 数列 $\{v_l\}_{l \geq 0}$ に対する母関数は

$$\sum_{l=0}^{\infty} v_l t^l = \frac{1 - qt}{1 - q^3 t}$$

で与えられる.

したがって, 定理 2.0.2 と命題 3.3.2 により定理 3.2.2 を得る.

謝辞

講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの長岡昇勇先生, 水野義紀先生に, この場を借りて心より感謝申し上げます.

参考文献

[G] K. Gejima, *An Explicit Formula of the Unramified Shintani Functions for* $(\mathbf{GSp_4}, \mathbf{GL_2} \times_{\mathbf{GL_1}} \mathbf{GL_2})$, preprint.

[KMS] S. Kato, A. Murase, T. Sugano, *Whittaker-Shintani functions for orthogonal groups*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 1-64.

[MS] A. Murase, T. Sugano, *Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups: I, The orthogonal group case*, Math. Ann. **299** (1994), 17-56.